

עבודת קיץ וריענון לקראת השנה הבאה תלמידי י"א שעולים ל י"ב 4 יח"ל.

החומר

לריענון:

חוקי חזקות

פתרון משוואות מעריכיות

טריגונומטריה

סרטוני חזרה וריענון עבור חוקי חזקות:

<https://www.youtube.com/watch?v=T1oGVv1AJJ4&list=PLF300326DDE45178>

סרטונים 2-16 ההסברים והתרגילים מתוך ספר הלימוד בשנה הבאה של

יואל גבע, אותם תקבלו

בתחילת השנה הבאה.

בתחילת שנת הלימודים יתקיים מבדק על עבודת הקיץ.

חופשה נעימה,

צוות מתמטיקה

מבוא – הגדרת החזקה

כאשר a הוא מספר כלשהו ו- n הוא מספר טבעי (חיובי ושלם) אז המכפלה $a \cdot a \cdot a \dots$ (כאשר a מופיע n פעמים) נקראת a בחזקת n והיא מסומנת a^n .

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ פעמים}}$$

המספר a נקרא בסיס החזקה. המספר n נקרא מעריך החזקה.

חוקי חזקות

(1) כאשר כופלים שתי חזקות בעלות בסיס שווה, מקבלים חזקה בעלת אותו בסיס ומעריך השווה לסכום המעריכים של החזקות שכופלים.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad \text{הנוסחה:}$$

(2) כאשר מחלקים שתי חזקות בעלות בסיס שווה (השונה מאפס) מקבלים חזקה בעלת אותו בסיס ומעריך השווה להפרש בין מעריך החזקה שבמונה לבין מעריך החזקה שבמכנה.

$$(a \neq 0) \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad \text{הנוסחה:}$$

(3) כאשר מעלים חזקה בחזקה, מקבלים חזקה עם אותו בסיס, בעלת מעריך השווה למכפלת שני המעריכים.

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad \text{הנוסחה:}$$

(4) כאשר נתונה חזקה שהבסיס שלה הוא מכפלה, ניעזר בנוסחה:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

(5) כאשר נתונה חזקה שהבסיס שלה הוא מנה (שבר), ניעזר בנוסחה:

$$(b \neq 0) \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

(6) כל מספר (השונה מאפס) בחזקת 0 שווה ל-1.

$$(a \neq 0) \quad a^0 = 1 \quad \text{הנוסחה:}$$

$$\frac{a^4 \cdot b^2 \cdot a^5 \cdot b^7}{a^2 \cdot b^4 \cdot a^6 \cdot b^3} \quad .24 \quad \frac{a^9 \cdot a^8 \cdot a^{12}}{a^{16} \cdot a^{11}} \quad .23 \quad \frac{a^5 b^6}{a^3 b^2} \quad .22$$

חשב את הביטויים הבאים:

$$\left(\frac{a^2}{b^5}\right)^2 \cdot \left(\frac{a^5}{b^3}\right)^2 \quad .33 \quad \left(\frac{a}{b^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{a^2}{b}\right)^2 \quad .32 \quad \left(\frac{a}{b}\right)^3 \quad .31$$

$$\left(\frac{16}{81}\right)^7 \cdot \left(\frac{729}{32}\right)^5 \quad .42 \quad \left(\frac{1}{2}\right)^8 \cdot 16^3 \quad .41 \quad \frac{108^{23}}{32^9 \cdot 81^{17}} \quad .40$$

תשובות: 1. 243 2. 2048 3. 16 4. -8 5. -64 6. 25 7. -25 8. -16 9.

9. 59 10. -7 11. 2592 12. 1296 13. 28 14. -1 15. -941192

16. a^{13} 17. a^{16} 18. $a^9 \cdot b^{11}$ 19. a^3 20. a 21. a^5 22. $a^2 b^4$ 23. a^2

24. ab^2 25. a^{42} 26. c^{18} 27. b^{12} 28. $a^4 b^4$ 29. $a^{12} b^6$ 30. $a^{10} b^{27}$

31. $\frac{a^3}{b^3}$ 32. $\frac{a^7}{b^8}$ 33. $\frac{a^{14}}{b^{16}}$ 34. 16 35. 5 36. 9 37. 18 38. 6 39. 108

40. 6 41. 16 42. 72

כלל: כאשר נתונות שתי חזקות בעלות בסיסים חיוביים שווים - a^b ו- a^c ונרצה לקבוע איזו מבין שתי החזקות היא הגדולה יותר נבדוק האם הבסיס a גדול מ-1 או בין 0 ל-1.

(1) אם הבסיס a גדול מ-1 אז הכלל הוא: **אם $b > c$ אז $a^b > a^c$**

כלומר הכיוון של אי-השוויון בין המעריכים **זהה** לכיוון

של אי-השוויון בין החזקות. למשל: $8 > 5$ ולכן $3^8 > 3^5$.

(2) אם הבסיס a בין 0 ל-1 אז הכלל הוא: **אם $b > c$ אז $a^b < a^c$**

כלומר הכיוון של אי-השוויון בין המעריכים **הפוך** מהכיוון

של אי-השוויון בין החזקות. למשל: $7 > 3$ אבל $0.6^7 < 0.6^3$.

(הרחבה בעניין זה ראה בהמשך בנושא אי-שוויונים מעריכיים).

דוגמה:

קבע מבין הביטויים הבאים, איזה ביטוי גדול יותר:

א. 81^{150} או 243^{121} ב. $7 \cdot 3^{18}$ או 3^{20}

פתרון:

א. נעביר את שני הביטויים לבסיס 3. $81^{150} = (3^4)^{150} = 3^{4 \cdot 150} = 3^{600}$

$243^{121} = (3^5)^{121} = 3^{5 \cdot 121} = 3^{605}$

מכיוון שהבסיס 3 גדול מ-1 הרי ש- $3^{605} > 3^{600}$, לכן $243^{121} > 81^{150}$.

ב. עבור הביטוי 3^{20} ניעזר בחוק $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ ונקבל:

$3^{20} = 3^{18+2} = 3^{18} \cdot 3^2 = 9 \cdot 3^{18}$

מכיוון ש- $9 > 7$ הרי ש- $9 \cdot 3^{18} > 7 \cdot 3^{18}$ ולכן $3^{20} > 7 \cdot 3^{18}$.

קבע מבין המספרים הבאים, איזה מספר גדול יותר.

44. 25^{20} או 5^{41}

47. 2^{300} או 3^{200}

50. 2^{75} או 3^{50}

53. $\left(\frac{8}{27}\right)^3$ או $\left(\frac{2}{3}\right)^8$

56. 0.35^{300} או 0.6^{600}

59. -3^{85} או -9^{42}

תשובות: 43. שמאל. 44. ימין. 45. שמאל. 46. ימין. 47. ימין. 48. שמאל.

49. ימין. 50. ימין. 51. שמאל. 52. ימין. 53. ימין. 54. ימין. 55. ימין.

56. ימין. 57. ימין. 58. ימין. 59. ימין. 60. ימין.

(7) כל מספר (השונה מאפס) בחזקת מעריך שלילי, שווה ל-1 חלקי המספר בחזקת מעריך חיובי שהוא המספר הנגדי למעריך השלילי.

$$(a \neq 0) \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{הנוסחה:}$$

ניתן להרחיב את החוק $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ עבור שברים ולקבל את הנוסחה:

$$(a \neq 0, b \neq 0) \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

כתוב את הביטויים הבאים ללא קו שבר (במידת הצורך, היעזר בחזקות שליליות).

$$\left(\frac{a^3}{b}\right)^4 \cdot \left(\frac{a^{-6}}{b^{-2}}\right)^2 \quad .24 \quad \frac{(a^2 b^{-4})^{-3}}{(a^{-1} b^2)^5} \quad .23 \quad \frac{(a^{-3})^4 \cdot (a^{-5})^{-2}}{(a^{-3})^2} \quad .22$$

חשב (ללא עזרת מחשבון):

$$\frac{81^{-11} \cdot 27^{15} + 16^{-9} \cdot 32^8 + 18^0}{10^{-9} : 10^{-8}} \quad .28 \quad \frac{64^{-9} \cdot 32^{11} + 27^{-15} \cdot 9^{23} + 7^{-7} \cdot 49^4}{2^{-11} \cdot 4^5} \quad .27$$

קבע (ללא מחשבון) איזה מספר גדול יותר:

$$10^{-6} \quad \text{או} \quad 2 \cdot 10^{-7} \quad .32 \quad 6^{-3} \quad \text{או} \quad 5^{-3} \quad .31$$

$$3^{-300} \quad \text{או} \quad 2^{-500} \quad .34 \quad 5^{-91} \quad \text{או} \quad 128 \cdot 5^{-94} \quad .33$$

$$2^{-16} \quad \text{או} \quad (-2)^{-14} \quad .36 \quad \left(\frac{1}{8}\right)^{-5} \quad \text{או} \quad \left(\frac{1}{4}\right)^{-7} \quad .35$$

$$a^{-1} \cdot b^2 \quad .23 \quad a^4 \quad .22 \quad a^{-9} \quad .21 \quad a^{-2} \quad .20 \quad a^{-5} \quad .19 \quad \frac{1}{4} \quad .18 \quad \frac{1}{27} \quad .17$$

$$.24 \quad .1 \quad .25 \quad .4 \quad .26 \quad .1 \quad .27 \quad .24 \quad .28 \quad .200 \quad .29 \quad \text{ימין} \quad .30 \quad \text{שמאל} \quad .31 \quad \text{ימין} \quad .32 \quad \text{שמאל} \quad .33 \quad \text{ימין} \quad .34 \quad \text{שמאל} \quad .35 \quad \text{שמאל} \quad .36 \quad \text{ימין} \quad .37 \quad \text{ימין} \quad .38 \quad \text{שמאל}$$

משוואה שבה הנעלם מופיע במעריך החזקה נקראת משוואה מעריכית.
למשל, המשוואות הבאות הן משוואות מעריכיות:
 $6^{x+1} + 6^{x-1} = 37$, $10^{x+1} = 100^{2-x}$, $3^x = 9$
במשוואה מעריכית הבסיסים חייבים להיות חיוביים.

הכלל: אם $a^x = a^y$ אז $x = y$.

ברוב המקרים הבסיסים אינם זהים ולכן קודם כל נעביר את שני האגפים לאותו בסיס ורק אז נשווה את המעריכים.

דוגמה:

פתור את המשוואה $9^{x+1} = 27^{4-x}$.

פתרון:

נעביר את שני האגפים לבסיס 3.
במקום 9 נרשום 3^2 . במקום 27 נרשום 3^3 .
נקבל: $(3^2)^{x+1} = (3^3)^{4-x}$ ומכאן $3^{2x+2} = 3^{12-3x}$.
הבסיסים שווים ולכן נשווה מעריכים.
נקבל: $2x + 2 = 12 - 3x$, כלומר $5x = 10$, ומכאן $x = 2$.

דוגמה:

פתור את המשוואה $6^{x^2-9} - 1 = 0$.

פתרון:

נעביר את המספר 1 לאגף ימין ונקבל: $6^{x^2-9} = 1$.
במקום 1 נרשום 6^0 . נקבל: $6^{x^2-9} = 6^0$.
הבסיסים שווים ולכן נשווה מעריכים.
נקבל: $x^2 - 9 = 0$, כלומר $x^2 = 9$ ומכאן $x = 3$ או $x = -3$.

הערה: במשוואה מעריכית הבסיס a הוא חיובי ולכן גם הביטוי a^x חיובי לכל x .

דוגמה:

פתור את המשוואה $3^x + 9 = 0$.

פתרון:

נעביר את המספר 9 לאגף ימין ונקבל $3^x = -9$.
מכיוון שהחזקה 3^x היא חיובית לכל x , לא ייתכן שהיא שווה ל-9-
ולכן למשוואה אין פתרון.
הסבר נוסף: במשוואה המקורית $3^x + 9 = 0$, באגף שמאל יש סכום של
שני מספרים חיוביים, כלומר אגף שמאל תמיד חיובי ולא יכול להיות
שווה ל-0 ומכאן שלמשוואה אין פתרון.

דוגמה:

פתור את המשוואה $4^{3x} \cdot 8^{x-2} = \frac{32}{2^{x+1}}$.

פתרון:

נעבור לבסיס 2. נקבל: $(2^2)^{3x} \cdot (2^3)^{x-2} = \frac{2^5}{2^{x+1}}$

$$2^{6x} \cdot 2^{3x-6} = \frac{2^5}{2^{x+1}}$$

באגף ימין ניעזר בנוסחה $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$.

באגף שמאל ניעזר בנוסחה $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.

נקבל: $2^{6x+3x-6} = 2^{5-(x+1)}$. הבסיסים שווים ולכן נשווה מעריכים.

נקבל $6x+3x-6=5-(x+1)$. פתרון המשוואה הוא $x=1$.

פתור את המשוואות הבאות:

$$16^{2x-3} = 8^{x+1} \quad .9 \quad 3^x = 9^{1-x} \quad .8 \quad 32^{\frac{x}{5}-2} = 16 \quad .7$$

$$6^x = 1 \quad .12 \quad 125^{4x-1} = 625^{1-\frac{x}{4}} \quad .11 \quad 100^{2x-1} = 10^{1-\frac{x}{2}} \quad .10$$

$$9^x = -3 \quad .15 \quad 7^x = 0 \quad .14 \quad 10^{2x+1} - 1 = 0 \quad .13$$

$$3^{2x} \cdot 3^{5x-10} = 81 \quad .18 \quad 8^{x-1} = 2^{x^2-7} \quad .17 \quad 3^{x^2-2x} = 27 \quad .16$$

$$(5^x \cdot 5^4)^2 = 25 \quad .21 \quad 81^{x+4} \cdot 27^{5-2x} = 243^{2x-7} \quad .20 \quad 2^{3x+4} \cdot 2^{5x-6} = 2^{x+5} \quad .19$$

ותר מעיר $(2^x)^{x+2} = 16 \cdot \frac{1}{4^{-x}}$.24

$$\frac{2^x}{8^{x-2}} = \frac{32}{4^{x-0.5}} \quad .23$$

$$(3^{2x+1} \cdot 81)^4 = 27 \quad .22$$

תשובות: $\frac{2}{3}$, .10, .3, .9, $\frac{2}{3}$, .8, .14, .7, .1, .6, .3, .5, $\frac{3}{4}$, .4, $\frac{1}{3}$, .3, .2, .2, .3, .1
 .11, $\frac{7}{13}$, .12, 0, .13, $-\frac{1}{2}$, .14, אין פתרון, .15, אין פתרון, .16, 3, -1, .17, 4, -1
 .18, 2, .19, .1, .20, 5.5, .21, -3, .22, -2.125, .23, אינסוף פתרונות, .24, 2, -2

$$\left(\frac{27}{8}\right)^{x^2+4} = \left(\frac{32}{243}\right)^{x-4} \quad .30$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{9}{16} \quad .29$$

$$4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} = 9 \quad .32$$

$$\left(6\frac{1}{4}\right)^{3x+2} = \left(\frac{2}{5}\right)^x \quad .31$$

$$(2^{x+1})^{\frac{4}{x}} = 0.5^{x-8} \quad .34$$

$$1000^{2x-4} = 0.01^{\frac{2}{3}x-5} \quad .33$$

$$\left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{x}{2}+3} = 2 \cdot 4^{3x-2} \quad .36$$

$$16 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{3x-1} = 2 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^x \quad .35$$

$$\frac{81}{3^x} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{2x^2+3} = \frac{1}{243} \quad .38$$

$$(2^{5x+4} \cdot 8^{x+3})^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^{x-2} \quad .37$$

תשובות: $-\frac{4}{7}$.31 $-\frac{2}{3}$,1 .30 .2 .29 .0 .28 .6 .27 -1 .26 -3 .25
 -1 ,0.75 .38 $-\frac{11}{9}$.37 $-1\frac{7}{17}$.36 $\frac{5}{3}$.35 .2 .34 .3 .33 -3 .32